Sharp triangle inequalityの一般化について (バナッハ空間及び関数空間論の最近の進展とその応用)

田村, 高幸; 藤井, 正俊; 加藤, 幹雄; 斎藤, 吉助

数理解析研究所講究録
第 1615 巻 2008 年 75-79

Sharp triangle inequality の一般化について

田村　高幸（千葉大学大学院人文社会科学研究科）
藤井　正俊（大阪教育大学）
加藤　幹雄（九州工業大学大学院工学研究院）
斎藤　吉助（新潟大学理学部）

三角不等式はバナッハ空間論において、基本的かつ重要な不等式の一つである。そこで、 Diaz and Metcalf [1]、 Dragomir [2]、Dunkl and Williams [4]、Hudzik and Landes [6]、 Massera and Schäffer [10]、Saitoh [12], Maligranda [8]、 Kato, Saito and Tamura [7] を始めとして、多くの研究者によってその研究が推進されている。特に、Kato, Saito and Tamura [7] は、バナッハ空間における triangle inequality の精密化を行い、次の sharp triangle inequality およびその reverse inequality を得た。

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right)\min_{1\leq i\leq n}\|x_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\|x_i\| \\
&\leq \|\sum_{i=1}^{n} x_i\| + \left(n - \left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\|\right)\max_{1\leq i\leq n}\|x_i\|.
\end{aligned}$$

この sharp triangle inequality はとても有用であり、その後、Mitani, Saito, Kato and Tamura [9]、Dragomir [3]、 Pećarić and Rajić [11]、Hsu, Shaw and Wong [5] 等によって研究され、さらなる精密化や一般化が行われている。

この報告では、有限族についての sharp triangle inequality を次の方法で求めることを目的とする。

(1) この有限族についての sharp triangle inequality を導出するような一般の有界無限族 S についての sharp triangle inequality 関連の不等式を証明する。

(2)(1) において証明された不等式をパラメーターを含む形に拡張する。

(1) の場合を考察するために、そのままでは、sharp triangle inequality の最初と最後の辺に n が現れており、任意の無限族 S について拡張は困難であるので、まず、有限族についての三角不等式を次のように見直してみることからはじめる。有限族についての三角不等式

$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

の両辺を n で割ると、次の形の平均不等式になる。

$$\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$$

Mathematics subject classification (2000): 46B20. 46B25
Key words and phrases: triangle inequality, mean.

すなわち、n 個の平均のノルムより各元のノルムの平均の方が大きくなるということである。この平均不等式の意味でならば、一般の有界無限族 S についての拡張を容易にすることができる。

$\ell^\infty(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体、X を実バナッハ空間、S を任意の集合とし、$\ell^\infty(S)$ を S 上の有界実数値関数の全体、$\ell^\infty(S;X)$ を S 上の有界 X 値写像の全体とする。以下で利用したものは、基本的には、Takahashi[13] において、非拡大写像の平均エルゴート定理の証明の際に用いられているアイディアである。

バナッハ空間の元からなる一般の族 $\{x_s\}_{s\in S}$ についての平均の概念の拡張から考察する。これは、一般の有界族 $\{x_s\}_{s\in S}$ は集合 S からバナッハ空間 X への有界写像とみなすことができ、そのノルムの族 $\{\|x_s\|\}_{s\in S}$ は集合 S 上の有界実数値関数となる。そこで、$\ell^\infty(S)$ の平均の概念の拡張である mean を利用して、ベクトル値写像に関しての mean の概念を定義する。

$\mu \in \ell^\infty(S)^*$ が *mean* であるとは、$\|\mu\| = 1$ かつ $\mu(\mathbf{1}) = 1$ が成り立つことである。これから、$\ell^\infty(S;X)$ から X^{**} への線形作用素 $M_\mu :\ \ell^\infty(S;X) \to X^{**}$ を次のように定義する:

$$(M_\mu(F))(x^*) = \mu(\{\langle F(s), x^*\rangle\}_{s\in S}).$$

ただし、すべての $s \in S$ に対して、$\langle F(s), x^*\rangle = x^*(F(s))$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
\|(M_\mu(F))(x^*)\| &= \|\mu(\{\langle F(s), x^*\rangle\}_{s\in S})\| \\
&\leq \|\mu\|\|\{\langle F(s), x^*\rangle\}_{s\in S}\| \\
&\leq \|\mu\|\|\{\|F(s)\|\|x^*\|\}_{s\in S}\| \\
&\leq \|\{\|F(s)\|\|x^*\|\}_{s\in S}\| \\
&= \|\{\|F(s)\|\}_{s\in S}\|\|x^*\|
\end{aligned}$$

より、

$$\|M_\mu(F)\| \leq \|\{F(s)\}_{s\in S}\|$$

を得る。一方、$\mathbf{x}(s) = x \quad (\forall s \in S)$ とすると、

$$\begin{aligned}
(M_\mu(\mathbf{x})(x^*) &= \mu(\{\langle \mathbf{x}(s), x^*\rangle\}_{s\in S}) \\
&= \mu(\{\langle x, x^*\rangle\}_{s\in S}) \\
&= \langle x, x^*\rangle \mu(\mathbf{1}) \\
&= \langle x, x^*\rangle
\end{aligned}$$

が任意の $x^* \in X^*$ について成り立つので、$M_\mu(\mathbf{x}) = x$ となる。

$$\|M_\mu(\mathbf{x})\| = \|\{\mathbf{x}(s)\}_{s\in S}\|.$$

従って、$\|M_\mu\| = 1$ かつ $M_\mu(\mathbf{x}) = x$ を満たすので、M_μ を *mean operator* と呼ぶことにする。この mean operator を用いて、次の平均不等式が得られる。

定理 1. X を実バナッハ空間、S を任意の集合、μ を $\ell^\infty(S)$ 上の mean とし、M_μ をそれに対応する mean operator とするとき、任意の $F \in \ell^\infty(S; X)$ に対して $\|M_\mu(F)\| \leq \mu(\{\|F(s)\|\})$ が成り立つ。

まず、(2) について、バナッハ空間 X の 2 つの元の場合について考察し、次の結果を得た。

定理 2 x, y をバナッハ空間 X の元とし、$f_{x,y}(t) = \frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ $(t > 0)$ とする。このとき、

$$\|x+y\| + \|y\| - f_{x,y}(t) \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x\| - f_{y,x}(s)$$

が $0 < s \leq 1 \leq t$ なる任意の $t, s \in [0, \infty]$ について成り立つ。

定理 $2'$ x, y をバナッハ空間 X の元とする。このとき、

$$\|x+y\| + \alpha\|x\| + \|y\| - \|\alpha x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x\| + \beta\|y\| - \|x + \beta y\|$$

が $0 < \alpha \leq 1 \leq \beta$ なる任意の $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ について成り立つ。

定理 $2'$ のアイデアと (1) の mean operator を利用して、次の結果を得た。

定理 3 X を実バナッハ空間、S を任意の集合、μ を $\ell^\infty(S)$ 上の mean とし、M_μ をそれに対応する mean operator とする。F, G を $\ell^\infty(S; X)$ の元とする。このとき、

$$\begin{aligned}
&\|M_\mu(\{F(s) + G(s)\})\| \\
&+\mu(\{\|\alpha(s)F(s)\|\}) + \mu(\{\|G(s)\|\}) - \|M_\mu(\{\alpha(s)F(s) + G(s)\})\| \\
\leq\ & \mu(\{\|F(s)\|\}) + \mu(\{\|G(s)\|\}) \\
\leq\ & \|M_\mu(\{F(s) + G(s)\})\| \\
&+\mu(\{\|F(s)\|\}) + \mu(\{\|\beta(s)G(s)\|\}) - \|M_\mu(\{F(s) + \beta(s)G(s)\})\|
\end{aligned}$$

が $0 < \alpha(s) \leq \mathbf{1}(s) \leq \beta(s) (s \in S)$ なる任意の $\alpha, \beta \in \ell^\infty(S)$ について成り立つ。

(2) の結果 (定理3) を利用して、任意の族 S についての sharp mean triangle inequality を得た。

定理 4. X を実バナッハ空間、S を任意の集合、μ を $\ell^\infty(S)$ 上の mean とし、M_μ をそれに対応する mean operator とする。このとき、$\inf_{s \in S} \|F(s)\| > 0$ なる任意の $F \in \ell^\infty(S; X)$ に対して

$$\|M_\mu(\{F(s)\})\| + \left(1 - \left\|M_\mu\left(\left\{\frac{F(s)}{\|F(s)\|}\right\}\right)\right\|\right) \inf_{s \in S} \|F(s)\|$$

$$\leq \mu(\{\|F(s)\|\})$$
$$\leq \|M_\mu(\{F(s)\})\| + \left(1 - \left\|M_\mu\left(\left\{\frac{F(s)}{\|F(s)\|}\right\}\right)\right\|\right) \sup_{s\in S}\|F(s)\|$$

が成り立つ。

参考文献

[1] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **17**(1966), 88–97.

[2] S. S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces,* J. Inequal. Pure and Appl. Math., **6**(5)(2005), Art. 129, pp. 46.

[3] S. S. Dragomir, *Generalizations of the Pećarić-Rajić inequality in normed linear spaces,* to appear in Math. Inequal. Appl.

[4] C. F. Dunkl and K. S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly, **71**(1964), 53–54.

[5] C. -Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H. -J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities*, J. Math. Anal. Appl., **344**(2008), 17-31.

[6] H. Hudzik and T. R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann., **294**(1992), 117–124.

[7] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **10**(2007), 451-460.

[8] L. Maligranda, *Simple norm inequalities,* Amer. Math. Monthly, **113**(2006), 256–260.

[9] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **336**(2007), 1178-1186.

[10] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis I,* Ann. of Math., **67**(1958), 517–573.

[11] J. Pećarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces*, Math. Inequal. Appl., **10**(2007), 461-470.

[12] S. Saitoh, *Generalizations of the triangle inequality,* J. Inequal. Pure Appl. Math., **4**(2003), no. 3, Art. 62, pp. 5.

[13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.